ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1979

OPTIONS M ET P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

E est un plan affine réel, $B = (O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère affine de E; dans tout le problème, (C) désigne l'ensemble des points M de E dont les coordonnées x et y dans B vérifient la relation $y^2 = 4x^3 - 3x + 9$.

I

1° *a.* Montrer que (C) a un unique point A d'ordonnée nulle; calculer l'abscisse a de A, sachant que c'est un nombre rationnel.

b. Étudier la concavité de (C) et déterminer le nombre de ses points d'inflexion. Préciser l'éventuelle tangente à (C) en A.

c. Tracer une représentation graphique de (C) (repère orthonormé, 2 cm par unité sur chaque axe).

2° Déterminer l'ensemble I_0 des nombres réels x tels que l'intégrale

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 3t + 9}}$$

ait un sens (on ne cherchera pas à calculer $f(x)$). On pose $b = f(a)$ et $J_0 = f(I_0)$, montrer que $J_0 =]0, b]$ et préciser en quels points de I_0 la fonction f est indéfiniment dérivable.

3° *a.* Établir qu'il existe des nombres réels u, v, w et une fonction $r(h)$ tendant vers 0 avec h, tels que l'on ait, pour tout $h \geqslant 0$, la relation

$$f(a + h) = b + \sqrt{h}\,(u + vh + wh^2 + h^2 r(h)).$$

Calculer u, v, w.

b. Déterminer la partie principale de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

II

1° *a.* Justifier l'existence de $F = f^{-1}$, fonction réciproque de f, définie sur $]0, b]$ et montrer que F est indéfiniment dérivable en tout point de $]0, b[$.

b. Établir que, pour tout t appartenant à $]0, b[$, F vérifie la relation

$$(F'(t))^2 = 4(F(t))^3 - 3F(t) + 9$$

et en déduire que F est indéfiniment dérivable au point b.

2° Expliciter le développement limité à l'ordre 4 de $F(b + k)$, k tendant vers 0 par valeurs strictement négatives; trouver la partie principale de $F(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3° On se propose de déterminer toutes les fonctions G, dérivables sur un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}$ et qui vérifient, pour tout t appartenant à J, les conditions

(1) $$(G'(t))^2 = 4(G(t))^3 - 3G(t) + 9$$

(2) $$G'(t) \neq 0.$$

a. Préliminaire. Si la fonction g, continue sur J, est telle que $(g(t))^2 = 1$ pour tout t appartenant à J, établir que l'une des deux fonctions $g - 1$ ou $g + 1$ est identiquement nulle sur J.

b. Soit G une fonction vérifiant (1) et (2) sur l'intervalle J; vérifier que G est indéfiniment dérivable sur J, montrer que la fonction $H = f \circ G$ est définie et indéfiniment dérivable sur J.

c. A l'aide de ce qui précède, déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur J qui vérifient (1) et (2). Donner un exemple de fonction non constante vérifiant (1) et non (2).

III

On prolonge F à l'intervalle $]0, 2b[$ en posant $F(t) = F(2b - t)$ si $b < t < 2b$.

1° *a.* Montrer que F, ainsi prolongée, est indéfiniment dérivable sur $]0, 2b[$.

b. Établir que l'application qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $]0, 2b[$, associe le point M de E dont les coordonnées dans B sont $F(t)$ et $F'(t)$, est une bijection de $]0, 2b[$ sur (C), qu'on appellera paramétrage canonique de (C).

c. Soient M_1 et M_2 deux points de (C), de paramètres canoniques respectifs t_1 et t_2 ($t_1 \neq t_2$), trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur t_1 et t_2, pour que la droite M_1M_2 soit parallèle à $\vec{j}$.

.../...

2° *a.* Soient t_0 et t deux nombres réels, avec $0 < t < t_0 < b$; l'équation de la droite joignant les points de (C) de paramètres canoniques t_0 et t étant mise sous la forme $y = p_t x + q_t$, démontrer qu'il existe un unique réel, noté $\alpha(t)$, tel que

- $0 < \alpha(t) < 2b$,
- $F(t_0)$, $F(t)$, $F(\alpha(t))$ soient les racines — non nécessairement distinctes — de l'équation en x :

$$(p_t x + q_t)^2 = 4x^3 - 3x + 9,$$

- les points de (C) de paramètres canoniques t_0, t et $\alpha(t)$ soient alignés.

b. Établir que α est fonction dérivable de t et calculer $\alpha'(t)$ (on pourra exprimer de deux façons la quantité $\frac{1}{y_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{y_\alpha} \cdot \frac{dx_\alpha}{dt}$, (x_0, y_0), (x, y) et (x_α, y_α) désignant les coordonnées des points de (C) de paramètres canoniques t_0, t et $\alpha(t)$ respectivement). En déduire la valeur de $\alpha(t)$.

c. Soient t_1, t_2, t_3 trois éléments distincts de l'intervalle $]0, 2b[$ et M_1, M_2, M_3 les points correspondants de (C). Démontrer que ces points sont alignés si, et seulement si, $t_1 + t_2 + t_3$ vaut $2b$ ou $4b$.

3° Soient t un élément de $]0, 2b[$ et T_t la tangente à (C) au point de paramètre canonique t. Pour quelles valeurs de t existe-t-il un réel t' distinct de t tel que l'intersection de T_t et (C) soit formée des points de paramètres canoniques t et t' ? Combien vaut alors t' ? Déterminer, en utilisant uniquement ce dernier résultat et la question I. 1°, les paramètres canoniques des points d'inflexion de (C).

4° Soit t un élément de $]0, b[$, exprimer $F(2t)$ et $F'(2t)$ à l'aide de $F(t)$ et $F'(t)$ uniquement.

IV

On se propose de déterminer les équations et représentations polynomiales de (C).

1° Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux indéterminées à coefficients réels; démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. pour tout point M de (C), de coordonnées x, y, on a $P(x, y) = 0$;

ii. il existe un polynôme $Q(X, Y)$ à coefficients réels, tel que $P(X, Y) = (Y^2 - 4X^3 + 3X - 9)\, Q(X, Y)$.

2° Soient $U(T)$ et $V(T)$ deux polynômes à une indéterminée à coefficients réels; on suppose que, pour tout nombre réel t, on a la relation

$$(V(t))^2 = 4(U(t))^3 - 3U(t) + 9,$$

établir que U et V sont constants. Conclure quant à la possibilité d'un paramétrage polynomial de (C).

88888

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail